Logaritmo

Função logarítmica

Veremos aplicação e funcionalidade do logaritmo no dia-a-dia, através de algumas situações problema, propostas nas atividades. O material abaixo consta de parte teórica, exercícios resolvidos e questões propostas.

Congregação das Filhas do Amor Divino
Colégio Cristo Rei
Av. Peregrino Filho, 301 – Centro
CEP: 58700-450 – Patos – PB
Fone: (083) 3421-3798 – Fax: (083) 3422-2285
CNPJ: 09.277.260/0001-83
www.ccrei.com.br

Hudson Guedes
Colégio CCREI

Logaritmos

Logaritmos

Definimos aqui o logaritmo como o inverso da exponencial, no seguinte sentido:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a(b) = x$$

Na equação $\log_a(b) = x$, temos a seguinte nomenclatura:

- **a** é a base do logaritmo;
- **b** é o logaritmando;
- **x** é o logaritmo.

Exemplos:

- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$
- $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$
- $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$
- $\log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$

Exercício Resolvido

1. Verifique se existe solução para as equações a seguir:

a) $8^x = 2 \Rightarrow$ Sim, pois $2^{3x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $625^x = 25 \Rightarrow$ Sim, pois $25^{2x} = 25 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $0^x = 5 \Rightarrow$ Não, portanto $S = \varnothing$

d) $1^x = 8 \Rightarrow$ Não, portanto $S = \varnothing$

e) $(-3)^x = x \Rightarrow$ Não, portanto $S = \varnothing$

f) $2^x = 5 \Rightarrow$ Sim, $\log_2 5$, pois $2x = 5$

Condição de existência

$$\log_a b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ 1 \neq a > 0 \end{cases}$$

Consequências da definição

$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$
$\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}$
$a^{\log_a b} = b$
$b = c \Leftrightarrow \log_a b = \log_a c$

Tome Nota

- Antilog$_b$ $a = x \Leftrightarrow \log_b x = a \Rightarrow x = b^a$.
- Logaritmo neperiano (ou natural): $\ell n\, x = \ell x = \log_e x$, em que: $e = 2{,}718$ (constante de Euler).
- Logaritmo decimal é aquele cuja base é igual a 10, ou seja, $\log a = \log_{10} a$.

Propriedades operatórias

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

Mudança de base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{(mudando para base } \mathbf{c}\text{)}$$

Tome Nota

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{(inversão)}$$

Equações logarítmicas

Situação-problema

Um estudante quer resolver a equação $2^x = 5$, utilizando uma calculadora que possui a tecla **log x**. Para obter um valor aproximado de **x**, o estudante deverá usar a calculadora para obter os seguintes números:

a) log2, log5 e log5 – log2.

b) log2, log5 e log5 : log2.

c) log2, log5 e log25.

d) $\frac{5}{2}$ e $\log\frac{5}{2}$.

e) $\sqrt{5}$ e $\log\sqrt{5}$.

Tipos de equações logarítmicas

1º caso

$$\log_b f(x) = k \Leftrightarrow f(x) = b^k \qquad \text{C.E.} \begin{cases} f(x) > 0 \\ 0 < b \neq 1 \end{cases}$$

Exemplo 1:

Resolver a equação: $\log_2(x^2 - 2x - 16) = 3$

Solução:

Condição de existência (C.E.): $x^2 - 2x - 16 > 0$ (C.E.)

Temos: $(x^2 - 2x - 16) = 2^3$

$\therefore x^2 - 2x - 16 = 8$

$\therefore x^2 - 2x - 24 = 0$ $\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Verificação:

a) $x = -4 \Rightarrow (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 16 > 0$ (verdadeiro) $\Rightarrow$

-4 é uma raiz

b) $x = 6 \Rightarrow 6^2 - 2 \cdot 6 - 16 > 0$ (verdadeiro) $\Rightarrow$

6 é outra raiz

O conjunto-solução é $S = \{-4, 6\}$.

Exemplo 2:

Resolver a equação $\log_{(x-3)}(x - 1) = 2$

Solução:

C.E.: $x - 1 > 0$; $x - 3 > 0$ e $x - 3 \neq 1$

Temos: $\log_{(x-3)}(x - 1) = 2$

$\therefore (x - 3)^2 = (x - 1)$

$\therefore x^2 - 6x + 9 = x - 1$

$\therefore x^2 - 7x + 10 = 0$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Verificação:

a) $x = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1 > \text{(verdadeiro)} \\ 2 - 3 > \text{(falso)} \end{cases} \Rightarrow$ 2 não é raiz

b) $x = 5 \Rightarrow \begin{cases} 5 - 1 > 0 \text{ (verdadeiro)} \\ 5 - 3 > 0 \text{ (verdadeiro)} \\ 5 - 3 \neq 1 \text{ (verdadeiro)} \end{cases} \Rightarrow$ 5 é raiz

O conjunto-solução é $S = \{5\}$.

2º caso

$\log_b f(x) = \log_b g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ C.E. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Exemplo:

Resolver a equação $\log_7(3x + 2) = \log_7(2x + 5)$

Solução:

C.E.: $3x + 2 > 0$ e $2x + 5 > 0$

Temos: $\log_7(3x + 2) = \log 7(2x + 5)$

$\therefore 3x + 2 = 2x + 5$

$\therefore 3x - 2x = 5 - 2$

$\therefore x = 3$

Verificação:

$x = 3$ $\begin{cases} 3(3) + 2 > 0 \text{ (verdadeiro)} \\ 2(3) + 5 > 0 \text{ (verdadeiro)} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 3 é raiz

O conjunto-solução é $S = \{3\}$.

3º caso

Exemplo:

Resolver a equação: $\log_{\sqrt{51}}\{\log_2[\log_3(\log_4 x)]\} = 0$

Solução:

C.E.: $x > 0$

Temos: $\log_{\sqrt{51}}\log_2[\log_3(\log_4 x)] = 0$

$\therefore \log_2[\log_3(\log_4 x)] = 1$ $(\sqrt{51})^0$

$\therefore \log_3(\log_4 x) = 2$ 2^1

$\therefore \log_4 x = 9$ 3^2

$\therefore x = 262.144$

4º caso

Exemplo:

Resolver a equação $x^{\log x} = \dfrac{100}{x}$

Solução:

C.E.: $x > 0$

$x^{\log x} = \dfrac{100}{x}$

Vamos tomar os logaritmos do 1º membro e do 2º membro na base 10, isto é:

$\therefore \log [x^{\log x}] = \log \dfrac{100}{x}$

$\therefore \log x \cdot \log x = \log 100 - \log x$

$\therefore [\log x]^2 = 2 - \log x$

Fazendo log x = y, obtemos:

$\therefore y^2 = 2 - y$

$\therefore y^2 + y - 2 = 0 \begin{cases} y' = 1 \\ y'' = -2 \end{cases}$

Portanto:

$\begin{cases} \log x = 1 \Rightarrow \quad x = 10 \\ \log x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{100}{x} \end{cases} \qquad S = \left\{10, \dfrac{1}{100}\right\}$

5º caso

Exemplo: Resolver a equação: $3 \cdot \log^2 x + 3 = \log x^{10}$

Solução:

C.E.: $x > 0$

Tome Nota

$\log^2 x = (\log x)^2$

$\log^2 x \neq \log x^2$

$\therefore 3 \cdot \log^2 x + 3 = \log x^{10}$

$\therefore 3(\log x)^2 + 3 = 10 \cdot \log x$

Substituição: log x = y, então $3y^2 + 3 = 10y$

$\therefore 3y^2 - 10y + 3 = 0 \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Voltando à substituição, temos:

$\begin{cases} \log x = 3 \Rightarrow x = 1.000 \\ \log x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{10} \end{cases}$

Ambas as soluções satisfazem a condição de existência para o logaritmando.

Portanto, $S = \{1.000, \sqrt[3]{10}\}$.

6º caso

Acompanhe os próximos exemplos:

Exemplo:

Resolver a equação logarítmica $\log_4 x + \log_2 x = 9$

Solução:

C.E.: $x > 0$

Como as bases são diferentes, faremos a mudança de base. A nova base da equação deve ser 2 ou 4.

Passando para base 2, temos:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

A equação proposta fica: $\dfrac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = 9$

Fazendo $\log_2 x = y$, temos:

$\dfrac{y}{2} + y = 9 \Rightarrow y = 2y = 18 \Rightarrow y = 6$

Substituindo y = 6 em $\log_2 x = y$, temos:

$\log_2 x = 6 \Rightarrow x = 26 \Rightarrow x = 64$.

Como x = 64 satisfaz a C.E., então S = {64}.

QUESTÕES PROPOSTAS

1. Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R\$ 5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R\$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5.000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para $\log 1{,}013$; 2,602 como aproximação para $\log 400$; 2,525 como aproximação para $\log 335$.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12.
b) 14.
c) 15.
d) 16.
e) 17.

2. Em 2011, a costa nordeste do Japão foi sacudida por um terremoto com magnitude de 8,9 graus na escala Richter. A energia liberada E por esse terremoto, em kWh, pode ser calculada por $R = \dfrac{2}{3}\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$, sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh e R a magnitude desse terremoto na escala Richter. Considere 0,84 como aproximação para $\log 7$.

Disponível em: http://oglobo.globo.com. Acesso em: 2 ago. 2012.

A energia liberada pelo terremoto que atingiu a costa nordeste do Japão em 2011, em kWh, foi de

a) $10^{10,83}$
b) $10^{11,19}$
c) $10^{14,19}$
d) $10^{15,51}$
e) $10^{17,19}$

3. Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$

b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

4. A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.
O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY, Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).
U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

a) $10^{-5,10}$

b) $10^{-0,73}$

c) $10^{12,00}$

d) $10^{21,65}$

e) $10^{27,00}$

5. Em um experimento no laboratório de pesquisa, observou-se que o número de bactérias de uma determinada cultura, sob certas condições, evolui conforme a função $B(t) = 10 \cdot 3^{t-1}$, em que $B(t)$ expressa a quantidade de bactérias e t representa o tempo em horas. Para atingir uma cultura de 810 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

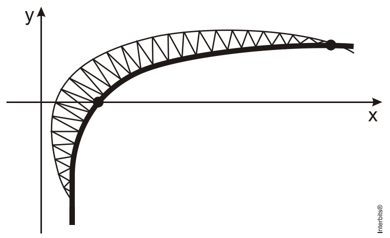
6. O domínio da função real de variável real definida por $f(x) = \log_7(x^2 - 4x) \cdot \log_3(5x - x^2)$ é o intervalo aberto cujos extremos são os números

a) 3 e 4.
b) 4 e 5.
c) 5 e 6.
d) 6 e 7.

7. Resolvendo a equação, $\log 2^x + \log(1 + 2^x) = \log 20$, encontramos o valor de x real igual a

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

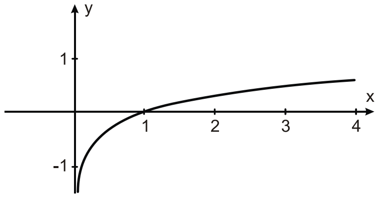
8. O modelo da cobertura que está sendo colocada no Estádio Beira-Rio está representado na figura abaixo.

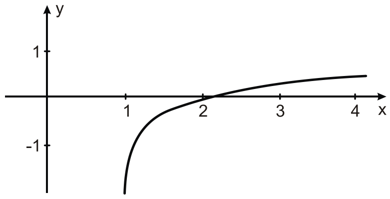


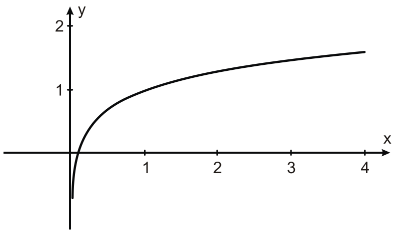
Colocada devidamente em um plano cartesiano, é possível afirmar que, na forma em que está, a linha em destaque pode ser considerada uma restrição da representação da função dada por

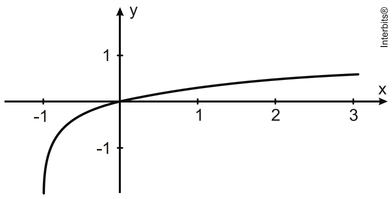
a) $y = \log(x)$
b) $y = x^2$
c) $y = |x|$
d) $y = \sqrt{-x}$
e) $y = 10^x$

9. O gráfico da função $y = \log(x+1)$ é representado por:

a)


b)


c)


d)


10. (G1 - ifpe 2018) Os alunos do curso de Meio Ambiente do campus Cabo de Santo Agostinho observaram que o número de flores em uma árvore X segue o modelo matemático $F(h) = 16 - \log_2(3h+1)$, onde $F(h)$ é a quantidade de flores após h horas de observação. Após quanto tempo de observação esta árvore estará com apenas 10 flores?
a) 6 horas.
b) 25 horas.
c) 20 horas.
d) 21 horas.
e) 64 horas.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:
Leia o texto para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Psicólogos educacionais podem utilizar modelos matemáticos para investigar questões relacionadas à memória e retenção da informação. Suponha que um indivíduo tenha feito um teste e que, depois de t meses e sem rever o assunto do teste, ele tenha feito um novo teste, equivalente ao que havia feito anteriormente. O modelo matemático que descreve situação de normalidade na memória do indivíduo é dado por $y = 82 - 12\log(t+1)$, sendo y a quantidade de pontos feitos por ele no instante t.

11. (Insper 2018) Após t meses da aplicação do teste inicial, a pontuação de um indivíduo no novo teste caiu para 70 pontos. Assim, é correto concluir que esse novo texto ocorreu t meses após o primeiro teste, com t igual a
a) 11.
b) 8.
c) 15.
d) 12.
e) 9.

12. (Enem 2018) Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.
Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100.000 transistores distribuídos em $0{,}25\ \text{cm}^2$ de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).
Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Considere $0{,}30$ como aproximação para $\log_{10} 2$.
Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?
a) 1999
b) 2002
c) 2022
d) 2026
e) 2146